

# Recent Techniques for Multi-Objective Optimization

---

FRE Lab Seminar (2024-04-05)

Giyeong Lee

---

# Table of Contents

---

1. Introduction
2. Methodology
3. Conclusion

# Multi-Objective Optimization

---

### ▪ Multi-Objective Optimization

- 하나의 작업에 요구되는 여러 기준 또는 평가지표를 동시에 최적화하는 방법론

$$\text{Optimize } \ell(\theta) = (\ell_1(\theta), \dots, \ell_m(\theta))^T$$

$$\text{s.t. } \theta \in \Theta \quad (\Theta : \text{feasible set of parameters})$$

- 이후부터는 각  $\ell_i$ 는 손실함수로 간주하며, 모델 파라미터에 대한 그래디언트는  $g_i$ 로 표기 (즉,  $g_i = \nabla_{\theta} \ell_i(\theta)$ )
- ‘최적화’를 바라보는 관점에 따라 다양한 기법이 존재
  - Pareto-optimality
  - Scalarization; (weighted) average of objectives
  - Gradient manipulation

### ▪ Cf) Multi-Task Learning

- 서로 다른 작업에 대한 성능을 동시에 최적화하는 방법에 관한 방법론
- 일반적으로 여러 작업에 걸친 공통 모델과 각 작업에 특화된 개별 모델의 결합으로 구성

# Multi-Objective Optimization in Finance

---

Task	Paper	Objective (Max)	Objective (Min)
RL-based Trading	[2], [4], [15]	<ul style="list-style-type: none"><li>- Profit</li><li>- (Average) log-return</li><li>- Sharpe ratio</li><li>- Liquidity</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>- Variance of return</li><li>- Gap between portfolio and market beta</li></ul>
Pair Trading	[6]	<ul style="list-style-type: none"><li>- Spread volatility</li><li>- Number of times the spread crosses zero</li><li>- ADF statistic</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>- Spread magnitude</li></ul>
Portfolio Optimization	[1], [8], [17], [20]	<ul style="list-style-type: none"><li>- Profit</li><li>- (Average) log-return</li><li>- Wealth; Cumulative return</li><li>- Skewness of return</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>- Variance of return</li><li>- Value-at-Risk</li><li>- Downside risk</li><li>- Kurtosis of return</li></ul>

# Pareto-Optimal Solution

---

### ▪ Pareto-Optimality & Pareto-Stationarity

- Pareto-optimality : 한 목표를 개선하려면 적어도 하나 이상의 다른 목표를 희생해야 하는 상태

$$\theta : \text{Pareto-optimal} \Leftrightarrow \nexists \eta \text{ s.t. } (\ell_i(\eta) \leq \ell_i(\theta) \forall i \text{ and } \exists j \text{ s.t. } \ell_j(\eta) < \ell_j(\theta))$$

- Pareto-stationarity

$$\theta : \text{Pareto-stationary} \Leftrightarrow 0 \in \text{Conv}(g_1, \dots, g_m)$$

- [5]에서 Pareto-stationarity가 Pareto-optimality의 필요조건임을 증명
- $\text{Conv}(x_1, \dots, x_k) = \{\sum_i w_i x_i \mid \sum_i w_i = 1, w_1, \dots, w_k \geq 0\}$  : Convex hull

### ▪ Multiple Gradient Descent Algorithm (MGDA)

- [5]에서 제안된 Pareto-stationary point로 수렴하는 학습 알고리즘
- MGDA의 적용 및 실용적 개선 : [10], [19]

# Basic Scalarization Approaches

---

### ▪ Scalarization

$\ell(\theta) = (\ell_1(\theta), \dots, \ell_m(\theta))^T$  에 적당한 함수  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  를 적용하여 얻은  $\mathcal{L}(\theta) = f(\ell(\theta)) \in \mathbb{R}$  에 대해 최적화

- 많은 경우  $\mathcal{L}(\theta) = \sum_i w_i \ell_i(\theta)$  를 사용

### ▪ 고정된 가중치 사용

- 손실함수의 단순합 또는 고정된 가중치에 대한 가중합을 통해 여러 손실함수를 단일 값으로 취합한 후 일반적인 최적화 방식 적용

### ▪ 가중치를 무작위로 추출하여 사용

- 가중합에 사용되는 가중치를 매 반복 단계마다 특정 분포로부터 추출
- Ref. [18]

# Dynamic Weight Average [13]

---

- **Dynamic Weight Average (DWA)**

$\mathcal{L}(\theta) = \sum_i w_i \ell_i(\theta)$ 에 대해, 각 반복 단계  $t$ 에서 사용할 각 손실함수의 가중치  $w_i$ 를 다음과 같이 결정

$$(w_1(t), \dots, w_m(t)) = m \cdot \text{softmax} \left( \frac{r_1(t-1)}{T}, \dots, \frac{r_m(t-1)}{T} \right), \quad r_i(t-1) = \frac{\ell_i(t-1)}{\ell_i(t-2)}$$

- $T$  : temperature (large  $T \Rightarrow$  more evenly weighted)
  - Large  $r_i(t-1) \Rightarrow$  Large  $w_i(t)$  :  $(t-1)$ 번째 업데이트에서의 개선 정도가 작을수록 손실함수 계산에 더 크게 반영
- 
- 가중치 산출에 그래디언트를 요구하지 않아 속도 저하가 적음
  - 손실함수 사이의 크기 차이가 큰 경우 학습이 불안정할 수 있어 사전 조정이 필요
    - 가중치가 충분히 작더라도 절대적인 개선폭이 커서 다른 손실함수의 개선을 저해할 수 있음

# Dynamic Task Prioritization [7]

---

- **Dynamic Task Prioritization (DTP)**

$\mathcal{L}(\theta) = \sum_i w_i \ell_i(\theta)$ 에 대해, 각 반복 단계  $t$ 에서 사용할 각 손실함수의 가중치  $w_i$ 를 다음과 같이 결정

$$w_i(t) = \text{FocalLoss}(\kappa_i(t); \gamma_i) = -(1 - \kappa_i(t))^{\gamma_i} \log \kappa_i(t)$$

- $\kappa_i(t) \in [0, 1]$ : 각 손실함수가 담당하는 목표의 달성도를 평가하는 사전 정의된 외부 지표 (key performance indicator, KPI)
  - $\gamma_i \geq 0$ : 가중치가 목표 달성도에 따라 얼마나 민감하게 조정되는지 결정
  - Small  $\kappa_i(t) \Rightarrow$  Large  $w_i(t)$ : 현재까지의 진척도가 낮을수록(목표 달성이 어려울수록) 손실함수 계산에 더 크게 반영
    - Cf. Uncertainty weighting [9]: 목표 달성이 더 쉬울수록 손실함수 계산에 더 크게 반영
- 
- KPI의 선택에 따라 같은 알고리즘과 손실함수 하에서도 다른 결과가 나올 수 있음
    - 대표적인 KPI가 손실함수와 별도로 존재하는 경우<sup>1</sup>가 아니라면 사용하기 어려움
- <sup>1</sup> 분류 문제: 손실함수는 cross-entropy, KPI는 accuracy
- 
- DWA와 마찬가지로, 손실함수 사이의 상대적 크기가 벌어질 경우 학습이 저해될 수 있음



# Gradient Normalization [3]

---

### ▪ Gradient Normalization (GradNorm)

각 반복 단계마다 다음 반복 단계에서 사용할 가중치를 아래 알고리즘에 따라 학습

$$w(t+1) \leftarrow w(t) - \eta_w \nabla_w \sum_i |G_i(t) - \bar{G}(t) \cdot r_i(t)|^\alpha$$

$$\text{where } G_i(t) = \|w_i(t)g_i(t)\|, \quad \bar{G}(t) = \frac{1}{m} \sum_i G_i(t), \quad L_i(t) = \frac{\ell_i(t)}{\ell_i(0)}, \quad r_i(t) = \frac{L_i(t)}{\frac{1}{m} \sum_i L_i(t)}$$

- $\alpha$ : 각 손실함수의 학습 속도를 조절
    - 큰  $\alpha$ 는 많이 개선된 손실함수에 대한 학습 속도를 더 크게 낮춤
  - 업데이트 이후에는  $\sum_i w_i = m$ 이 되도록 스케일링
- 
- 많은 손실함수에 대한 가중치를 파라미터 하나만으로 조정 가능하나, 많은 계산량이 필요

# Project Conflicting Gradient [22]

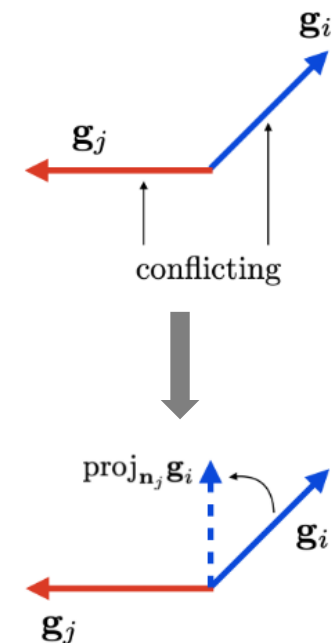
### Project Conflicting Gradient (PCGrad)

임의의 두 그래디언트 사이의 충돌이 발생하는 경우가 없을 때까지 그래디언트를 하나씩 보정

- 그래디언트  $g_i, g_j$ 에 대해  $\langle g_i, g_j \rangle < 0$ 일 때 두 그래디언트가 ‘충돌’한다고 정의
- $g_i$ 가  $g_j$ 에 충돌하는 경우,  $g_i$ 를  $g_j$ 의 normal plane로의 정사영(orthogonal projection)으로 보정

$$g_i \leftarrow g_i - \frac{\langle g_i, g_j \rangle}{\|g_j\|^2} g_j$$

- 모든 보정이 끝난 후, 최종 학습 방향  $-\sum_i g_i$ 을 따라 모델을 업데이트
- 기본적인 SGD보다 빠르게 학습이 진행되며, 손실함수가 2개이고 각각이 블록인 경우 (국지) 최적해로 수렴
  - 3개 이상의 손실함수에 대한 이론적 뒷받침은 제시되지 않음
- 모든 그래디언트 쌍  $(g_i, g_j)$ 의 충돌 여부를 계산하기 때문에 손실함수가 많아질수록 계산량 부담이 커짐



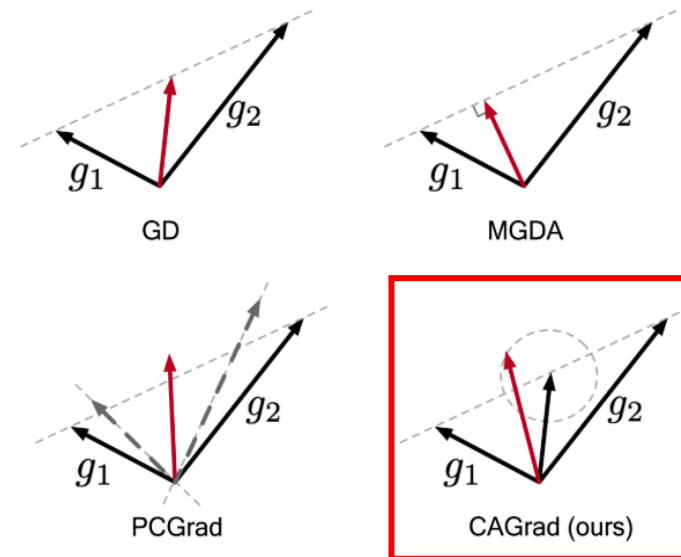
# Conflict-Averse Gradient [12]

### Conflict-Averse Gradient (CAGrad)

파라미터의 학습 방향  $-d$ 를 다음과 같이 결정

$$\begin{aligned} \max_{d \in \mathbb{R}^D} \min_i \langle g_i, d \rangle &= \|g_i\| \|d\| \text{CosSim}(g_i, d) \\ \text{s. t. } \|d - g_0\| &\leq c \|g_0\| \end{aligned}$$

- $g_0 : g_1, \dots, g_m$ 의 평균
  - $\langle g_i, d \rangle$ :  $-d$ 를 따라 학습할 때  $\ell_i$ 가 개선/저해되는 정도를 측정 (클수록 개선에 크게 기여)
  - 실제 구현은 dual form을 이용한 더 간단한 형태의 계산으로 구성됨
- $c \in [0, 1)$ 일 때 모델은 Pareto-stationary point로 수렴
- 그래디언트의 크기에 민감하게 반응
    - 손실함수의 크기를 사전에 조정하거나 cosine similarity만 고려하는 등의 추가 기법을 고려 가능
    - GradNorm[3]을 통해 보정하였을 때 성능이 개선됨을 함께 보고함



### 3. Conclusion

---

## Summary

---

- 다양한 기법에도 불구하고, 첫 접근은 여전히 고정 가중치 방식이 우선; [14], [21]
  - 이미지 인식 분야에서, 고정 가중치를 사용한 결과가 여러 기법이 적용된 것과 비슷하거나 더 나은 성능을 보인다는 연구가 있음
  - 그러나 가중치 탐색이 넓은 범위에서 많이 이루어지지 않는 경우, 대체로 앞서 소개된 기법을 적용한 결과가 더 나은 성능을 보임  
⇒ 충분히 많은 후보를 검증하기 어려운 경우 적용 여부를 고려할 만함
- 각 기법마다 개선의 대상이 다르므로 적용하려는 문제(또는 손실함수들)에 대한 특성 파악이 선행되어야 함
  - 손실함수 사이의 크기 조정 : [9]
  - 손실함수 사이의 학습 속도 조정 : [3], [13], [19]
  - 손실함수 사이의 충돌 조정 : [12], [22]
  - 학습 난이도에 따른 조정 : [7], [9]
- 많은 계산을 요구하는 기법의 개선을 위한 연구가 지속적으로 진행 중
  - Ref. [11], [16]

---

# References

---

- [1] Abolmakarem, S., Abdi, F., Khalili-Damghani, K., and Didehkhani, H. Predictive multi-period multi-objective portfolio optimization based on higher order moments: Deep learning approach. *Computers & Industrial Engineering* 183 (2023), 109450.
- [2] Bisht, K., and Kumar, A. Deep reinforcement learning based multi-objective systems for financial trading. In *2020 5th IEEE International Conference on Recent Advances and Innovations in Engineering (ICRAIE)* (2020), IEEE, pp. 1 - 6.
- [3] Chen, Z., Badrinarayanan, V., Lee, C.-Y., and Rabinovich, A. Gradnorm: Gradient normalization for adaptive loss balancing in deep multitask networks. In *International conference on machine learning* (2018), PMLR, pp. 794 - 803.
- [4] Cornalba, F., Disselkamp, C., Scassola, D., and Helf, C. Multi-objective reward generalization: improving performance of deep reinforcement learning for applications in single-asset trading. *Neural Computing and Applications* 36, 2 (2024), 619 - 637.
- [5] Désidéri, J.-A. Multiple-gradient descent algorithm (mgda) for multiobjective optimization. *Comptes Rendus Mathématique* 350, 5-6 (2012), 313 - 318.
- [6] Goldkamp, J., and Dehghanimohammadabadi, M. Evolutionary multi-objective optimization for multivariate pairs trading. *Expert Systems with Applications* 135 (2019), 113 - 128.
- [7] Guo, M., Haque, A., Huang, D.-A., Yeung, S., and Fei-Fei, L. Dynamic task prioritization for multitask learning. In *Proceedings of the European conference on computer vision (ECCV)* (2018), pp. 270 - 287.
- [8] He, Q., He, Z., Duan, S., and Zhong, Y. Multi-objective interval portfolio optimization modeling and solving for margin trading. *Swarm and Evolutionary Computation* 75 (2022), 101141.
- [9] Kendall, A., Gal, Y., and Cipolla, R. Multi-task learning using uncertainty to weigh losses for scene geometry and semantics. In *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition* (2018), pp. 7482 - 7491.
- [10] Lin, X., Zhen, H.-L., Li, Z., Zhang, Q.-F., and Kwong, S. Pareto multi-task learning. *Advances in neural information processing systems* 32 (2019).
- [11] Liu, B., Feng, Y., Stone, P., and Liu, Q. Famo: Fast adaptive multitask optimization. *Advances in Neural Information Processing Systems* 36 (2024).
- [12] Liu, B., Liu, X., Jin, X., Stone, P., and Liu, Q. Conflict-averse gradient descent for multi-task learning. *Advances in Neural Information Processing Systems* 34 (2021), 18878 - 18890.
- [13] Liu, S., Johns, E., and Davison, A. J. End-to-end multi-task learning with attention. In *Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition* (2019), pp. 1871 - 1880.

---

# References

---

- [14] Maninis, K.-K., Radosavovic, I., and Kokkinos, I. Attentive single-tasking of multiple tasks. In *Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition* (2019), pp. 1851 - 1860.
- [15] Mansour, N., Cherif, M. S., and Abdelfattah, W. Multi-objective imprecise programming for financial portfolio selection with fuzzy returns. *Expert Systems with Applications* 138 (2019), 112810.
- [16] Royer, A., Blankevoort, T., and Ehteshami Bejnordi, B. Scalarization for multi-task and multi-domain learning at scale. *Advances in Neural Information Processing Systems* 36 (2024).
- [17] Saborido, R., Ruiz, A. B., Bermúdez, J. D., Vercher, E., and Luque, M. Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection. *Applied soft computing* 39 (2016), 48 - 63.
- [18] Sanh, V., Wolf, T., and Ruder, S. A hierarchical multi-task approach for learning embeddings from semantic tasks. In *Proceedings of the AAAI conference on artificial intelligence* (2019), vol. 33, pp. 6949 - 6956.
- [19] Sener, O., and Koltun, V. Multi-task learning as multi-objective optimization. *Advances in neural information processing systems* 31 (2018).
- [20] Si, W., Li, J., Ding, P., and Rao, R. A multi-objective deep reinforcement learning approach for stock index future's intraday trading. In *2017 10th International symposium on computational intelligence and design (ISCID)* (2017), vol. 2, IEEE, pp. 431 - 436.
- [21] Vandenhende, S., Georgoulis, S., Van Gansbeke, W., Proesmans, M., Dai, D., and Van Gool, L. Multi-task learning for dense prediction tasks: A survey. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* 44, 7 (2021), 3614 - 3633.
- [22] Yu, T., Kumar, S., Gupta, A., Levine, S., Hausman, K., and Finn, C. Gradient surgery for multi-task learning. *Advances in Neural Information Processing Systems* 33 (2020), 5824 - 5836.