Asset Pricing : Theory and Application

2024.09.20

FRE Lab 양재원

목차

01 Theory : Classical Asset Pricing

- Asset Pricing은 재무경제학에서 주요 연구 주제로, 자산의 가격을 평가하기 위한 방법론을 연구함

- 널리 알려진 Asset Pricing Model로는 Capital Asset Pricing Model(CAPM), Arbitrage Pricing Theory(APT), Consumption-based Model 등이 있음

- 이러한 모델들은 시차를 두고 독자적으로 발전했으나 Fundamental Equation of Asset Pricing로 유도 가능 ($p_t = \mathrm{E}_t[m_{t+1}x_{t+1}]$)

> “Asset pricing theory all stems from one simple concept: price equals expected discounted payoff”
>
> 『John H. Cochrane-Asset Pricing (2004) [1]』

> “The empirical quest in asset pricing for the last 40 years has been to estimate a stochastic discount factor”
>
> 『Chen et al.-Deep Learning in Asset Pricing (2024) [2]』

01 Theory : Classical Asset Pricing

- Definition 1) Completeness of Financial Market
  - 자산이 N개, state 종류가 S개일 때, payoff matrix $\mathbf{X} \in \boldsymbol{R}^{N\times S}$
  - 모든 $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^{S}$에 대해서 어떤 포트폴리오 $\mathbf{h} \in \boldsymbol{R}^{N}$이 존재하여 $\boldsymbol{z} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}$ 가 성립
  - $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}$는 포트폴리오 $\mathbf{h}$에 대한 state별 payoff
  - 따라서 Asset span(모든 가능한 state별 payoff의 집합)이 $\boldsymbol{R}^{S}$와 동일하다는 것

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1(1) & \cdots & x_1(S) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N(1) & \cdots & x_N(S) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_S)^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)^{\mathrm{T}}$$

- Definition 2) No Arbitrage
  - 자산의 가격을 $\mathbf{p} \in \boldsymbol{R}^{N}$라고 하자.
  - 포트폴리오 $\mathbf{h} \in \boldsymbol{R}^{N}$의 현재 시장 가격은 $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}$이고, state별 payoff는 $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{h} \in \boldsymbol{R}^{S}$
  - Arbitrage는 $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{h} \leq \mathbf{0}$와 $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{h} > \mathbf{0}$을 동시에 만족시키거나, $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{h} < \mathbf{0}$와 $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{h} \geq \mathbf{0}$을 동시에 만족시키는 포트폴리오 $\mathbf{h}$
  - No Arbitrage는 위의 조건을 만족하는 $\mathbf{h}$가 존재하지 않는다는 것

01 Theory : Classical Asset Pricing

- $p_t = \mathrm{E}_t[m_{t+1}x_{t+1}]$(Fundamental Equation of Asset Pricing)의 의미
  - 자산 가격(p_t)은 discounted payoff의 기댓값($\mathrm{E}_t[m_{t+1}x_{t+1}]$)과 같다.
  - m_{t+1}은 할인율에 대한 확률변수이며, stochastic discount factor(SDF)라고 칭함
  - 여기에서 m_{t+1}과 x_{t+1}은 state에 따라 변하기 때문에 엄밀하게는 $m_{t+1}(s), x_{t+1}(s)$로 적는게 맞지만 보통 생략함
  - E_t는 t시점의 정보에 대한 conditional expectation을 의미($\mathrm{E}_t[m_{t+1}x_{t+1}]$= $\mathrm{E}[m_{t+1}x_{t+1}|I_t]$, I_t : Information set)

- $\mathrm{E}_t[m_{t+1}R_{t+1}] = 1$ 혹은 $\mathrm{E}_t[m_{t+1}R^e_{t+1}] = 0$ 으로도 표현 가능

  x_{t+1}/p_t $\quad$ $R_{t+1} - R^f_{t+1}$

- Simple example - 2가지 state(호황, 불황)가 동일 확률로 존재하는 주식시장

자산	현재가	호황 시의 가격 (Payoff)	불황 시의 가격 (Payoff)
S&P500 ETF	500	550	450
미국 국채 ETF	100	98	102

두 자산에 대한 Fundamental Equation of Asset Pricing

-. S&P500 ETF : 500=0.5 x 550 x m(호황)+0.5 x 450 x m(불황)

-. 미국 국채 ETF : 100=0.5 x 98 x m(호황)+0.5 x 102 x m(불황)

01 Theory : Classical Asset Pricing

Theorem 1

No arbitrage $\Leftrightarrow \exists\, m_{t+1} > 0 \; s.t.\; \mathrm{E}_t\left[m_{t+1}R^e_{t+1,i}\right] = 0, \forall\, i = 1 \sim N$

No arbitrage 조건과 conditional moment 조건을 만족하는 positive SDF의 존재성은 동치이다

Theorem 2

$\mathrm{E}_t\left[m_{t+1}R^e_{t+1,i}\right] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{E}\left[m_{t+1}R^e_{t+1,i}z_{t,i}\right] = 0\;, \forall z_{t,i} \in I_t$

conditional moment 조건의 만족은 모든 정보에 대한 unconditional moment 조건의 만족과 동치이다

Theorem 3

No arbitrage 조건을 만족시키는 SDF에 대해서 $m_{t+1} = a_t - b_t R^{mv}_{t+1}$ (b_t>0)

No arbitrage 조건을 만족하는 SDF는 mean-variance efficient portfolio의 affine transformation이다.

02 Application : Deep Learning in Asset Pricing

앞선 Theorem1~3을 정리하면 No arbitrage는 아래의 식을 만족하는 SDF(m_{t+1})가 존재함을 의미한다.

$$\mathrm{E}\left[m_{t+1} R_{t+1,i}^{e} z_{t,i}\right] = 0, \forall z_{t,i} \in I_t, \forall\, i = 1 \sim N,$$

$$\text{where } m_{t+1} = a_t - b_t R_{t+1}^{mv},$$

Problem1 : $\forall z_{t,i} \in I_t$를 어떻게 고를 것인가?
→ 모든 정보를 사용하는 생성형 모델
→ $\boldsymbol{z_{t,i} = g(I_t, I_{t,i})}$

Problem2 : a_t, b_t는 어떻게 고를 것인가?
→ incomplete market, No arbitrage 가정
→ 무수히 많은 SDF가 존재함
→ $\boldsymbol{m_{t+1} = 1 - R_{t+1,mv}^{e}}$로 두어도 SDF를 찾을 수 있음

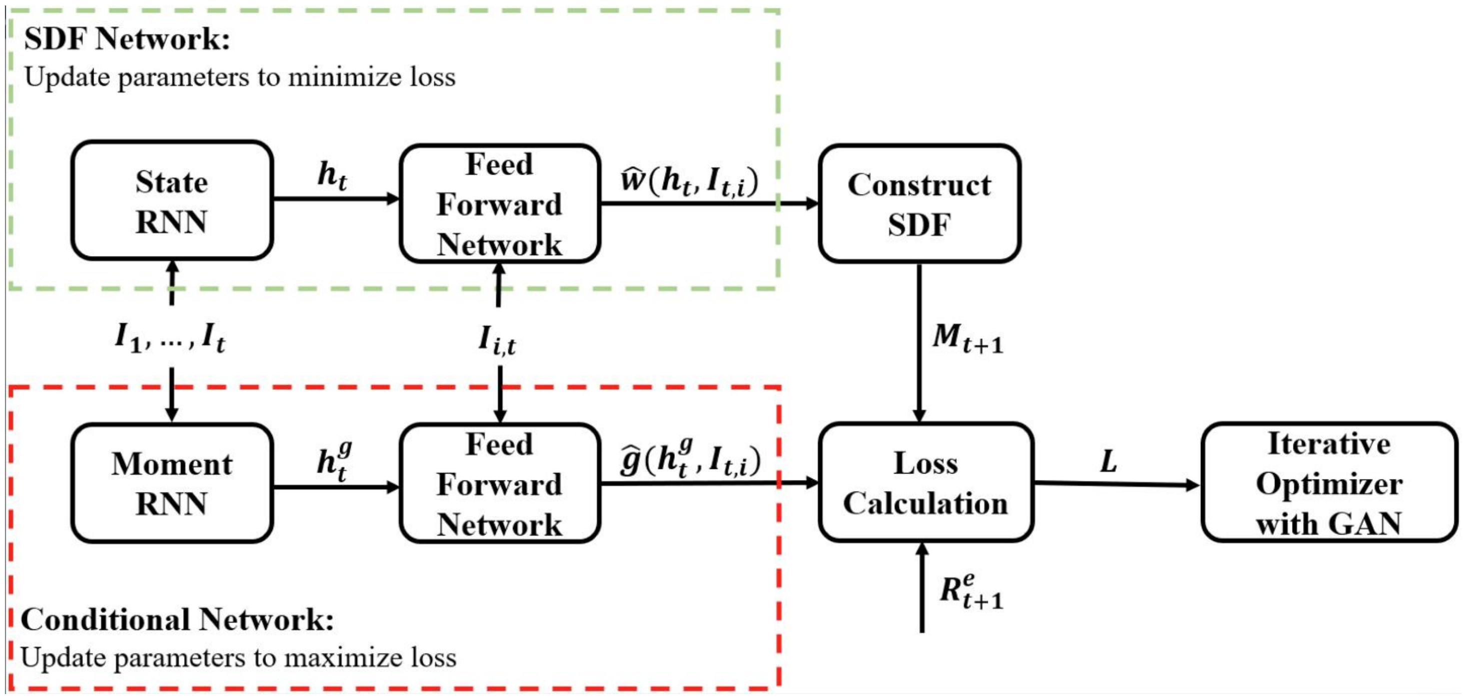
$$\min_{\omega} \max_{g} \sum_{j=1}^{N} \left\| \mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=1}^{N} \omega(I_t, I_{t,i}) R_{t+1,i}^{e}\right) R_{t+1,j}^{e}\, g(I_t, I_{t,j})\right] \right\|^2$$

02 Application : Deep Learning in Asset Pricing

$$\min_{\omega}\max_{g}\sum_{j=1}^{N}\left\|\mathbb{E}\left[\overbrace{\left(1-\sum_{i=1}^{N}\omega(I_t,I_{t,i})R^e_{t+1,i}\right)}^{m_{t+1}}R^e_{t+1,j}\,g(I_t,I_{t,j})\right]\right\|^2$$

ω는 pricing error를 **최소화**

g는 pricing error를 **최대화**



Optimization Algorithm

① initialize SDF Network
② update Conditional Network
③ update SDF Network

- 다른 모델에 비해서 SDF 구조를 잘 포착함

Table 1. Performance of Different SDF Models

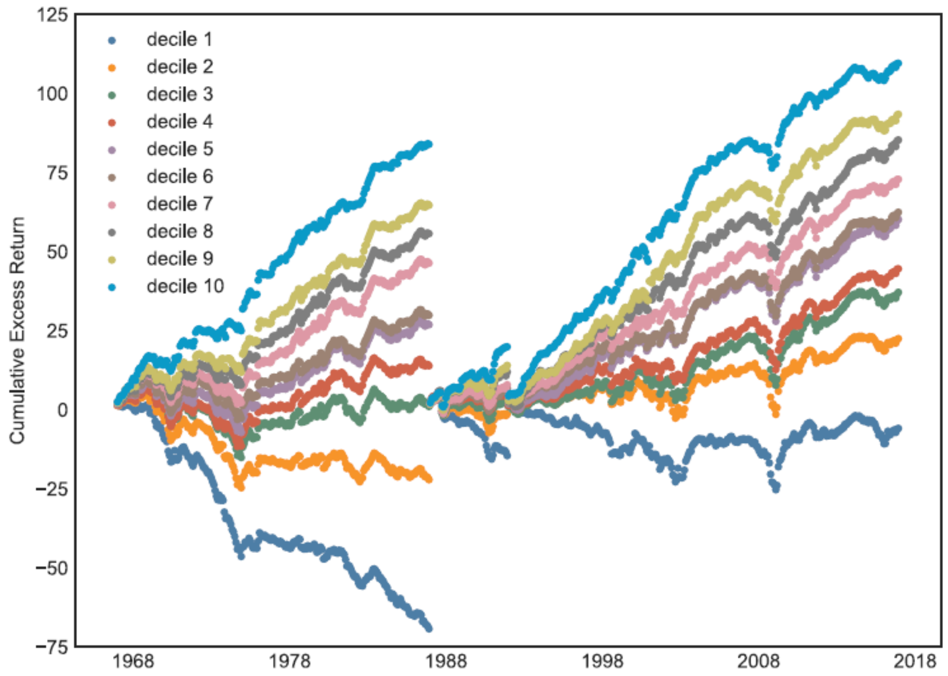
		SR			EV			XS-R^2		
	Model	Train	Valid	Test	Train	Valid	Test	Train	Valid	Test
Least Squared	LS	1.80	0.58	0.42	0.09	0.03	0.03	0.15	0.00	0.14
Elastic Net	EN	1.37	1.15	0.50	0.12	0.05	0.04	0.17	0.02	0.19
Feed Forward Network	FFN	0.45	0.42	0.44	0.11	0.04	0.04	0.14	−0.00	0.15
Proposed Network	GAN	2.68	1.43	0.75	0.20	0.09	0.08	0.12	0.01	0.23

Note. This table shows the monthly Sharpe ratio (SR) of the SDF, explained time series variation (EV), and cross-sectional mean R^2 for the GAN, FFN, EN, and LS models.

02 Application : Deep Learning in Asset Pricing

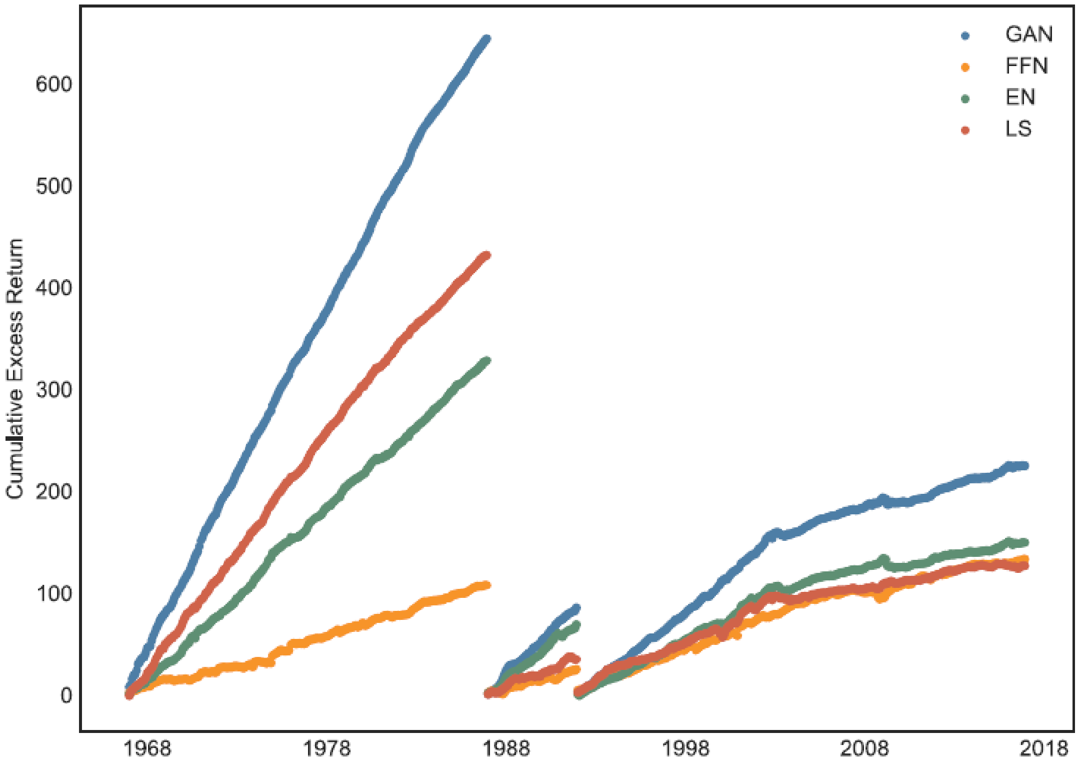
- 포트폴리오 성과 역시 우수함

Figure 7. (Color online) Cumulative Excess Return of Decile-Sorted Portfolios with GAN



Notes. This figure shows the cumulative excess return of decile-sorted portfolios based on the risk loadings β. The first portfolio is based on the smallest decile of risk loadings, whereas the last decile portfolio is constructed with the largest loading decile. Within each decile, the stocks are equally weighted.

Figure 16. (Color online) Cumulative Excess Returns of SDF



Notes. The figure shows the cumulative excess returns for the SDF for GAN, FFN, EN, and LS. Each factor is normalized by its standard deviation for the time interval under consideration.

Reference

[1] J. H. Cochrane, Asset pricing, Revised Edition. Princeton university press, 2009.

[2] L. Chen, M. Pelger, J. Zhu, Deep learning in asset pricing, Management Science 70 (2) (2024) 714-750.